ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.4. 1974

Х л я п о в а Е.А.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ ПАР ФИГУР, ПОРОЖДЕННЫХ ЦЕНТРАЛЬНОЙ КОНИКОЙ И ТОЧКОЙ.

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются пары K, образованные конгруэнцией (F_1) центральных коник F_1 и поверхностью (F_2), описанной точкой F_2, не инцидентной плоскости коники F_1, причем касательная плоскость поверхности (F_2) не параллельна плоскости коники F_1. В работе подробно исследованы пары K_1, выделенные из пар K с использованием условий двустороннего расслоения пары ассоциированных прямолинейных конгруэнций и одностороннего аффинного расслоения от прямолинейных конгруэнций к конгруэнции плоскостей, и их геометрические свойства. Некоторые частные классы пар K рассматривались Липатовой Ф.А. [1].

§1. Система пфаффовых уравнений пары K.

Канонический репер $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ пары K строим следующим образом: вершину A репера совмещаем с точкой F_2, концы E_α векторов $\bar{e}_\alpha$ $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)$ располагаем на конике F_1 таким образом, что прямые E_1E_2, CE_3, где C — центр коники F_1, являются сопряженными диаметрами коники F_1,

а прямая E_1E_2 является линией пересечения касательной плоскости поверхности (A) и плоскости коники F_1.

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar{A}=\omega^\alpha\bar{e}_\alpha, \quad d\bar{e}_\alpha=\omega_\alpha^\beta\bar{e}_\beta, \tag{1}$$

где формы Пфаффа ω^α, ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры аффинного пространства:

$$\mathcal{D}\omega^\alpha=\omega^\beta\wedge\omega_\beta^\alpha, \quad \mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta. \tag{2}$$

Относительно построенного репера уравнения коники F_1 имеют вид:

$$(x^1)^2+(x^2)^2-x^1-x^2=0, \quad x^1+x^2+x^3=1. \tag{3}$$

Исключая из рассмотрения случай параллельности касательной плоскости поверхности (A) вектору $\bar{e}_3$, примем главные формы ω^1, ω^2 за независимые. Система дифференциальных и конечных уравнений пары K примет вид:

$$\omega^3=\Gamma_i^3\omega^i, \quad \omega_\alpha^\beta=\Gamma_{\alpha i}^\beta\omega^i, \quad \Gamma_1^3=\Gamma_2^3, \quad (i,j,k=1,2). \tag{4}$$

Из системы (4) следует, что пары K определяются с произволом девяти функций двух аргументов.

§2. Пары K_1.

О п р е д е л е н и е. Пара K называется парой K_1, если выполнены следующие условия: 1) прямолинейные конгруэнции (AE_3) и (E_1E_2) двусторонне расслояемы [2], 2) прямолинейная конгруэнция (AE_i) и конгруэнция координатных плоскостей $(A\bar{e}_j\bar{e}_3)$ (здесь и в дальнейшем $i \neq j$) односторонне аффинно расслояемы [3], 3) поверхность (E_i) является огибающей плоскостей $(A\bar{e}_i\bar{e}_3)$, 4) на индикатрисе вектора $\bar{e}_i$ касательная вдоль линии $\omega^j = 0$ параллельна плоскости $(A\bar{e}_j\bar{e}_3)$.

Условия, характеризующие пары K_1, аналитически записываются в виде:

$$
\begin{gathered}
\omega^1 \wedge (\omega^2 + \omega_2^1 + \omega_2^2) + (\omega^3 + \omega_2^3) \wedge \omega_3^1 = 0, \\
\omega^2 \wedge (\omega^1 + \omega_1^1 + \omega_1^2) + (\omega^3 + \omega_1^3) \wedge \omega_3^2 = 0, \\
(\omega^1 + \omega^2) \wedge (\omega_1^1 + \omega_1^2 - \omega_2^1 - \omega_2^2) + (\omega_1^3 - \omega_2^3) \wedge (\omega_3^1 + \omega_3^2) = 0, \qquad (5) \\
\omega_3^1 \wedge (\omega^1 + \omega^2 + \omega_1^1 + \omega_1^2) + \omega_3^2 \wedge (\omega^1 + \omega^2 + \omega_2^1 + \omega_2^2) = 0, \\
\omega^1 \wedge (\omega_1^1 + \omega_1^2) + \omega^2 \wedge (\omega_2^1 + \omega_2^2) + (\omega^3 + \omega_1^3) \wedge \omega_3^1 + (\omega^3 + \omega_2^3) \wedge \omega_3^2 = 0, \\
\omega^1 \wedge (\omega^3 + \omega_1^3) + \omega^2 \wedge (\omega^3 + \omega_2^3) = 0,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
&\omega_i^j \wedge \omega_j^i + \omega_i^3 \wedge \omega_3^i = 0, && \text{(здесь по индексам} \\
&\omega^i \wedge \omega_i^j + \omega^3 \wedge \omega_3^j = 0, && i,j \text{ не суммировать)} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

$$\omega_1^2 = -\omega^2, \quad \omega_2^1 = -\omega^1, \qquad (7)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0. \qquad (8)$$

Замыкание пфаффовых уравнений (7) даст

$$\omega^1 \wedge \omega_2^2 - \omega_3^1 \wedge \omega_2^3 = 0, \quad \omega^2 \wedge \omega_1^1 - \omega_3^2 \wedge \omega_1^3 = 0. \qquad (9)$$

Учитывая все приведенные выше условия (5)-(9) в системе уравнений (4) и обозначая $\Gamma_1^3 = a$, $\Gamma_{3i}^3 = b_i$, запишем замкнутую систему уравнений пары K_1 в виде:

$$
\begin{gathered}
\omega^3 = a(\omega^1 + \omega^2), \quad \omega_1^1 = \omega_2^2 = 0, \quad \omega_1^2 = -\omega^2, \\
\omega_1^3 = -a\omega^1, \quad \omega_2^1 = -\omega^1, \quad \omega_2^3 = -a\omega^2, \\
a\omega_3^1 = -\omega^2, \quad a\omega_3^2 = -\omega^1, \quad \omega_3^3 = -b_i\omega^i, \qquad (10) \\
da = -a\omega_3^3, \quad db_i \wedge \omega^i = 0.
\end{gathered}
$$

Система уравнений (10) - в инволюции и определяет пары K_1 с произволом одной функции двух аргументов.

Т е о р е м а. Пары K_1 обладают следующими свойствами: 1) прямолинейная конгруэнция (AE_i) является параболической, её торсы высекают на фокальной поверхности семейство координатных линий,

2) точка A является центром луча AE_3 прямолинейной конгруэнции (AE_3),

3) координатные линии суть асимптотические линии поверхностей (A), (C), (E_i),

4) касательная плоскость поверхности центров коники F_1 в точке C параллельна касательной плоскости поверхности (A) в точке A,

5) касательная плоскость поверхности (E_3) в точке E_3

параллельна диаметру E_1E_2 коники F_1,

6) касательная вдоль координатной линии $\omega^i = 0$ в точке E_i поверхности (E_i) параллельна вектору $\bar{e}_3$, а вдоль линии $\omega^j = 0$ — вектору $\bar{e}_i$,

7) аффинная нормаль поверхности (A) в точке A проходит через центр C коники F_1,

8) аффинная нормаль поверхности (E_i) в точке E_i коллинеарна вектору $\bar{e}_j$,

9) аффинные нормали поверхностей (A) и (E_i) пересекаются в точке M, являющейся центром связки плоскостей $(A\bar{e}_1\bar{e}_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждений 1-9 непосредственно следует из приведенных ниже формул.

Фокусы F_3', F_3'' луча AE_3 прямолинейной конгруэнции (AE_3), фокусы F_i и торсы прямолинейной конгруэнции (AE_i) определяются соответственно формулами:

$$F_3' = \bar{A} + a\bar{e}_3, \quad F_3'' = \bar{A} - a\bar{e}_3;$$

$$\bar{F}_i = \bar{A} + \bar{e}_i, \quad \omega^j = 0.$$

Асимптотические линии поверхностей $(A), (C), (E_i)$ определяются уравнением:

$$\omega^1\omega^2 = 0.$$

Касательные плоскости поверхностей $(A), (C)$ соответственно в точках A и C коллинеарны векторам:

$$\bar{C}_i = \bar{e}_i + a\bar{e}_3.$$

Векторы

$$\bar{E}_3' = \bar{e}_1 - \frac{1}{a}\bar{e}_2 + (a + b_1)\bar{e}_3, \quad \bar{E}_3'' = \bar{e}_1 - \bar{e}_2$$

являются направляющими векторами касательной плоскости поверхности (E_3) в точке E_3.

Касательная плоскость поверхности (E_i) в точке E_i параллельна вектору

$$d\bar{E}_i - \bar{e}_i\omega^i + a\bar{e}_3\omega^j \qquad (\text{по } i \text{ – не суммировать!}).$$

Направляющие векторы аффинных нормалей поверхности (A) в точке A и поверхности (E_i) в точке E_i имеют соответственно вид:

$$\bar{\eta} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \quad \bar{\nu}_i = \bar{e}_j.$$

Аффинные нормали поверхностей (A), (E_i) пересекаются в точке

$$\bar{M} = \bar{A} + \bar{e}_1 + \bar{e}_2,$$

для которой

$$d\bar{M} = 0.$$

Таким образом, теорема доказана.

Л и т е р а т у р а

1. Липатова Ф.А., Об одном классе пар фигур, порожденных эллипсом и точкой. "Дифференц. геом. многообразий фигур", вып. 2 (Тр. Калининградского ун-та), 1971.

2. Фиников С.П., Теория пар конгруэнций. ГИТТЛ, М., 1956.

3. Ткач Г.П., О некоторых классах аффинно расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве. "Дифференц. геометрия многообразий фигур", вып. 3 (Межвузовский сборник), Калининград, 1973.

С е м и н а р

по дифференциальной геометрии многообразий фигур при Калининградском университете.

В предыдущем выпуске освещена работа семинара до 17 мая 1972 года.

Ниже приводится перечень докладов, обсужденных с 11 октября 1972 года по 16 мая 1973 года.

11.10.1972. В.С. М а л а х о в с к и й, Касательно-оснащенные гиперкомплексы квадратичных элементов в P_n.

18.10.1972. Ю.И. П о п о в, Инвариантное оснащение центрированных вырожденных m -мерных гиперполос Γ_m ранга τ ($\tau < m$) многомерного проективного пространства.

25.10.1972. Г.П. Т к а ч, Конгруэнции нецентральных квадратичных пар в A_3.

1.11.1972. В.П. С е м е н о в а (Шапенко), Об одном классе вырожденных конгруэнций линейных пар в евклидовом пространстве.

15.11.1972. Ю.И. Ш е в ч е н к о, О некоторых связностях, ассоциированных с многообразиями пар фигур в P_n.

22.11.1972. В.И. Козлова, Конгруэнции коник с двумя фокальными поверхностями, вырождающимися в прямые линии.

29.11.1972. Б.А. А н д р е е в, Об отображениях точечных пространств в пространства пар фигур.